MATIÈRES À OPTION

(Option générale)

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Soit N un entier $\geqslant 1$ et soit E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre N à coefficients réels.

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de E.

On note $a_{ij}(n)$ le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de A ($1 \leqslant i \leqslant N$ et $1 \leqslant j \leqslant N$).

Soit A la matrice carrée d'ordre N dont le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est a_{ij}.

On dit que la suite de matrices $(A_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la matrice A :

si $\forall (i,j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant N}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{ij}(n) = a_{ij}$, on écrit alors : $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de E et soient B et C deux matrices à coefficients réels, respectivement à L lignes et N colonnes, et à N lignes et K colonnes. Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} BA_n = BA, \quad \lim_{n\to\infty} A_nC = AC \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} BA_nC = BAC.$$

PREMIÈRE PARTIE

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune 3 boules. Il y a au total 3 boules blanches et 3 boules noires. On effectue une suite d'épreuves définies ainsi : à chaque épreuve, on tire au hasard une boule dans U_1 et une boule dans U_2 et on remet les boules en les échangeant. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient U_1 après la n-ième épreuve ($n = 1, 2, \ldots$).

1. Soit $n \geqslant 1$. Pour $i, j = 0, 1, 2, 3$, calculer la probabilité conditionnelle :

$$\lambda_{ij} = P(X_{n+1} = i | X_n = j).$$

(Les résultats seront donnés sous forme de tableau à double entrée.)

2. Soit $n \geqslant 1$. Pour $i = 0, 1, 2, 3$, montrer que :

$$P(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{3} \lambda_{ij} P(X_n = j).$$

3. On note C_n le vecteur de R^4 égal à :

$$\begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}.$$

Soit (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de R^4. Si au départ l'urne U_1 contient k boules blanches, montrer que pour $n \geqslant 1$, $C_n = M^n E_{k+1}$, où M est la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 1 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tournez la page S.V.P.

4. Déterminer les valeurs propres de M, et montrer que M est diagonalisable.

5. On tire au hasard un échantillon de 3 boules parmi 6 boules dont 3 sont blanches et 3 sont noires. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

   Quelle est la loi suivie par X ?

   Soit C le vecteur : $\begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$.

   Montrer que C est vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

DEUXIÈME PARTIE

Soient Q une matrice inversible et D une matrice diagonale telles que $Q^{-1}MQ = D$. On suppose que le vecteur C forme la première colonne de Q. (On ne cherchera pas à déterminer les autres colonnes de Q.)

1. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} M^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

2. Soit $L = (l_1, l_2, l_3, l_4)$ la première ligne de Q^{-1}. Montrer que le vecteur :

$$^tL = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix}$$

   est vecteur propre de la transposée ^tM de M, associé à la valeur propre 1.

3. Montrer que $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$.

4. En déduire que la matrice :

$$Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

   a ses quatre colonnes égales à C.

5. X étant la variable aléatoire définie à la question 5. de la première partie, montrer que pour tout entier naturel k ($0 \leqslant k \leqslant 3$), on a :

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k).$$

FIN